Calcul vectoriel

Michel Paty

in Ambrière, Madeleine (dir.), *Dictionnaire du XIX è siècle européen*, Presses Universitaires de France, Paris, 1997, p. 198-199.

Calcul vectoriel

C'est vers le milieu du dix-neuvième siècle que les notions de vecteur et d'espace vectoriel ont fait leur entrée en mathématiques, essentiellement à la suite des travaux de Hamilton et de Grassmann sur les quaternions et les algèbres linéaires. Des vecteurs d'un espace sont des grandeurs définies dans cet espace par leur module et leur direction, indépendamment de leur origine. Le calcul vectoriel est l'ensemble des opérations effectuées sur ces grandeurs (addition, soustraction, multiplication). L'origine des vecteurs et de leur calcul se rattache d'un coté à la formation de la mécanique classique, et d'un autre coté à la question de la représentation géométrique des nombres imaginaires apparus dans la résolution des équations algébriques.

La composition des forces et des vitesses en mécanique, connue dès la fin du dix-septième siècle, contient en effet en germe le calcul vectoriel pour l'espace ordinaire. La résultante des forces exercées sur un système est calculée algébriquement par ses composantes sur les axes de coordonnées; mais dans les raisonnements effectués sur les figures, la somme ou la différence de telles grandeurs est définie géométriquement tout en étant pensée sur le mode algébrique, à travers un calcul symbolique de ces grandeurs (par ex. chez d'Alembert), qui resta confiné à la mécanique.

Ce n'est qu'avec la représentation géométrique des nombres complexes que l'addition des vecteurs devait faire son entrée en mathématiques pures, aux alentours de 1800. John Wallis avait déjà suggéré, au dix-septième siècle, que l'on pourrait représenter les imaginaires purs sur un axe perpendiculaire à celui des nombres réels. Mais l'idée d'une représentation géométrique des nombres complexes ne commença à se faire jour qu'à la fin du dix-huitième siècle.

Dans sa dissertation inaugurale de 1797, Carl Friedrich Gauss démontra rigoureusement le théorème fondamental de l'algèbre en s'aidant de la correspondance entre un nombre complexe et un point du plan. Il développa ensuite cette conception géométrique des nombres imaginaires dans ses travaux sur la théorie des nombres et sur les fonctions elliptiques. En fait, Gauss ne donnera un exposé explicite de cette conception géométrique des nombres complexes qu'en 1831. Elle fut retrouvée indépendamment par le danois Caspard Wessel (1745-1818) dès 1798, mais l'opuscule où il la publia passa inaperçu. Le suisse Jean Robert Argand (1768-1822) donna de son coté, en 1806, une représentation géométrique des nombres complexes a +ib, qui fut reprise ensuite par Cauchy. Toutefois, la représentation géométrique des imaginaires ne devait être généralement adoptée qu'au milieu du siècle, à la suite de la publication tardive des travaux de Gauss et des recherches de Hamilton et de Cayley.

Quoiqu’il en soit, une sorte de calcul vectoriel fit son apparition au début du dix-neuvième siècle. L’italien Bellavitis développa, dans sa “Méthode des équipollences”, en appliquant une représentation géométrique des imaginaires à la géométrie élémentaire, l’addition des vecteurs que Gauss avait esquissée dans sa Dissertation. Möbius donna indépendamment une autre version de l’addition vectorielle, sous le nom de calcul barycentrique, en rapport à la géométrie projective”. Mais c’est avec les travaux de l’irlandais Hamilton et de l’allemand Grassmann que l’addition des vecteurs devait être pleinement développée, au sein d’un “calcul vectoriel”.

Dès 1833, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) proposa d’interpréter la multiplication des nombres complexes en termes de rotation dans le plan. En se posant le problème de l’extension du plan complexe à l’espace et de la multiplication de triplets $a+bi+cj$, il s’aperçut, grâce à cette interprétation, qu’il fallait envisager des multiplications non commutatives. C’est en suivant cette idée qu’il découvrit les quaternions, en 1843. Cherchant la multiplication de triplets, et plus généralement de multiplets d’ordre n supérieur à 2, il parvint à résoudre le problème en prenant des quadruplets $a+bi+cj+dk$ et en renonçant à la commutation pour la multiplication.

En appliquant le calcul des quatemions à la trigonométrie sphérique et à des problèmes de géométrie (dans ses articles “On symbolical geometry”, publiés de 1846 à 1849), ainsi qu’à des problèmes de mécanique (attraction newtonienne, mouvement d’un solide autour d’un point fixe, etc.) Hamilton put expliciter et développer le calcul vectoriel (le calcul des quaternions divise les grandeurs en scalaires et vecteurs), et en montrer la fécondité. Pour ce qui concerne l’application en mécanique, en particulier, en faisant correspondre aux couples mécaniques de Poinsot des couples algébriques de vecteurs, il retrouva par la méthode des vecteurs les résultats de la Statique de Poinsot.

Parallèlement à Hamilton, Hermann Günther Grassmann (1809-1877) et George Boole (1815-1864) eurent l’idée des quaternions et d’une algèbre non-commutative. L’ Ausdehnungslehre (La théorie des extensions linéaires), de Grassmann, publiée un an après la découverte de Hamilton, est une théorie algébrico-géométrique construite autour d’une conception géométrique ou intrinsèque de l’espace vectoriel à n dimensions, et qui constitue un calcul général des vecteurs à un nombre quelconque de dimensions. Grassmann y définit l’indépendance linéaire des vecteurs, donne la relation des dimensions entre deux espaces vectoriels, et développe l’algèbre linéaire à l’aide de la multiplication intérieure et extérieure des vecteurs de cet espace.

Des quaternions de Hamilton et de l’algèbre linéaire de Grassmann naquit donc le calcul vectoriel, qui devait connaître des applications immédiates en physique. Maxwell vit dans la découverte de Hamilton une invention aussi importante que celle des coordonnées cartésiennes, et utilisa les quaternions pour exprimer sa théorie électromagnétique dans son Traité sur l’électromagnétisme, mais d’une façon qui équivalait au calcul vectoriel. Le physicien américain Josiah Willard Gibbs (1839-1903) développa, en 1881, à partir des travaux de Grassmann, l’algèbre des vecteurs dans l’espace à trois dimensions. Les années suivantes furent marquées par de vives controverses entre les partisans des quaternions (Tait) et ceux du calcul vectoriel (Gibbs et Heaviside) pour la formalisation de la physique.

Le calcul vectoriel fut adopté comme le langage courant des équations de champ en physique après la parution des ouvrages sur la théorie électromagnétique de Oliver Heaviside en Grande-Bretagne et de August Föppl en Allemagne, vers 1893-1894. Quant aux quaternions, ils devaient être remplacés en physique par l'algèbre linéaire, avec le calcul vectoriel, le calcul tensoriel (découvert par Christoffel en 1869) et les matrices (introduites par A. Cayley en 1858), avant de renaître sous d'autres formes et dans d'autres circonstances au vingtième siècle.

Bibliographie

BELAVISTIS, Giusto, *Teoria della equipolenza*,

BERZOLARI, VIVANTE, GILLI (éds.), *Encicopedia delle matematische elementari*, , 1925-1948.

BELL, E. T. *Development of mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1940.

BOURBAKI, Nicolas, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1969.

BOYER, Carl. *A history of mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 1985.

CROWE, M.I. *A history of vector analysis*, NotreDame (Ill.), 1967.

GAUSS, Carl Friedrich, *Werke*, 12 vols., Göttingen, 1970-1927.

GIBBS, John. Willard. *Elements of vector analysis*, 1881.

GRASSMANN, Hermann Günther. *Die lienale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, 1844, éd. augm., 1862.

GÜRSEY, Feza. "Quaternionic and octonionic structures in physics. Episodes in the relations between physics and mathematics", in DONCEL, Manuel; HERMANN, Armin; MICHEL, Louis; PAIS, Abraham (eds). *Symmetries in physics (1600-1980)*, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, 1983, p. 557-592.

HAMILTON, William Rowan. *Lectures on quaternions*, Dublin, 1853.

- *Elements of quaternions*, 1866.

- *Mathematical papers*, 3 vols., Cambridge University Press, Cambridge, 1931-1967.

HEAVISIDE, Oliver. *Electromagnetic theory*, 1893.

FÖPPL, A. *Einfuhrung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität*, Leipzig, 1894.

SINEGRE, Luc, Les quaternions et le mouvement d'un solide autour d'un point fixe chez Hamilton, *Revue d'histoire des mathématiques* 1, 1995, 83-109.

TAIT, P.G. *Elementary treatise on quaternions*, Oxford, 1867. 2è éd., 1873; trad. fr. sur la 2è éd., par Gustave Plarr, Gauthier-Villars, Paris, 1882.

Michel PATY